ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΘΕΜΑΤΑ

Άσκηση 1 Δίνεται η εξίσωση $x \cdot y=2$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy. Να βρεθεί η εξίσωση αυτής στο σύστημα συντεταγμένων που προκύπτει με στροφή των αξόνων κατά γωνία $\frac{\pi}{3}$.

Λύση

Οι τύποι μετασχηματισμού συντεταγμένων είναι:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\cos\varphi)x' - (\sin\varphi)y' \\ y &= (\sin\varphi)x' + (\cos\varphi)y' \end{aligned}\right\}$$ **(Σχέση 5.2)**

και για $\varphi=\frac{\pi}{3}$ γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} x &= (\cos\frac{\pi}{3})x' - (\sin\frac{\pi}{3})y' \\ y &= (\sin\frac{\pi}{3})x' + (\cos\frac{\pi}{3})y' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{aligned}\right\}$$

Άρα η εξίσωση $x \cdot y=2$ θα γίνει :

$$(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y') \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y')=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(x')^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(y')^2 - \frac{1}{2}y' \cdot x'=2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(x')^2 - \sqrt{3}(y')^2 - 2y' \cdot x'=8.$$

Άσκηση 2 Έστω η παράσταση x^2-y^2 στο σύστημα συντεταγμένων 0xy. Να βρεθεί η γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφούν οι άξονες, έτσι ώστε στο σύστημα 0x'y' η παράσταση να γίνει $(x')^2-(y')^2-2x'y'$.

Λύση

Οι τύποι μετασχηματισμού συντεταγμένων είναι:

$$\left.\begin{array}{l} x=(\cos\varphi)x'-(\sin\varphi)y' \\ \\ y=(\sin\varphi)x'+(\cos\varphi)y' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2=(\cos^2\varphi)(x')^2+(\sin^2\varphi)(y')^2-2(\cos\varphi)x'(\sin\varphi)y' \\ \\ y^2=(\sin^2\varphi)(x')^2+(\cos^2\varphi)(y')^2+2(\cos\varphi)x'(\sin\varphi)y' \end{array}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$x^2-y^2=(\cos^2\varphi)(x')^2+(\sin^2\varphi)(y')^2-2(\cos\varphi)x'(\sin\varphi)y'$$

$$-(\sin^2\varphi)(x')^2-(\cos^2\varphi)(y')^2-2(\cos\varphi)x'(\sin\varphi)y'$$
$$=(x')^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-(y')^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-4(\cos\varphi)x'(\sin\varphi)y'$$
$$=(x')^2(\cos2\varphi-(y')^2(\cos2\varphi-2x'y'(\sin2\varphi) \Rightarrow$$

$$(x')^2-(y')^2-2x'y'=(x')^2(\cos2\varphi)-(y')^2(\cos2\varphi)-2x'y'(\sin2\varphi) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos2\varphi=1 \\ \\ \sin2\varphi=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\varphi=\pi/4 \Rightarrow \varphi=\pi/8.$$